الدورة الاستدراكية 2005

- **يتكون هذا الموضوع من أسئلة مستقلة فيما بينها و ثلاث تمارين و مسألة.**
- **يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.**

أسئلة :(أربع نقط)

1) حل المعادلة التفاضلية : $y''+y'-6y=0$.(1ن).

2) اكتب على الشكل المثلثي العدد $Z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.(1ن).

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos(x)\ln(1+Cos(x))\,dx=\dfrac{\pi}{2}-1$.(1ن).

(نذكر أن $Sin^2(x)=1-Cos^2(x)$)

4) نضع : $u_n=n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ لكل n من IN^* . احسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.(1ن).

التمرين الأول :(نقطتان)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $x-z+1=0$ و الفلكة S التي مركزها $\Omega(1,0,0)$ و شعاعها $r=2$.

1) بين أن (P) و S يتقاطعان وفق دائرة (Γ) .(0.5ن).

2) حدد مركز و شعاع الدائرة (Γ) .(1.5ن).

التمرين الثاني :(نقطتان و نصف)

1) اكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(1-i)^2$.(0.25ن).

2) حل في C المعادلة : $z^2-2(1+2i)z-(3-6i)=0$.(0.75ن).

3) نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $A(3i)$ و $B(2+i)$.

حدد ثم أنشئ (D) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z-3i|=|z-2-i|$.(1.5ن).

التمرين الثالث :(ثلاث نقط و نصف)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء و كرتين سوداوين لايمكن التمييز بينها باللمس.

1) نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس. ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء؟(0.5ن)

2) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 5كرات من الكيس. ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط؟(1ن)

3) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال n كرة من الكيس.

أ- بين أن احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل هو $p=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.(1ن).

ب- ما هو العدد الأدنى من السحبات التي من أجلها $p \geq 0.999$.(نأخذ $\log(3) \approx 0,48$ حيث $\log$ هو اللوغاريثم العشري).(1ن)

مسألة : (ثمان نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,2[$ بما يلي : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1) أ- احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.(1ن)

ت- بين أن $f'(x) = \dfrac{2}{x(2-x)}$ لكل x من $]0,2[$.(0.75ن)

ث- أعط جدول تغيرات الدالة f .(0.5ن)

2) أ- بين أن النقطة $A(1,0)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) .(0.5ن)

ب- اكتب معادلة ديكارتية للمماس (D) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,0)$.(0.5ن)

3) نضع $\varphi(x) = f(x) - x$ لكل x من $]0,2[$.

أ- بين أن $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \prec 0$ و $\varphi\left(\dfrac{7}{4}\right) \succ 0$.(نأخذ $\ln(3) \approx 1,1$ و $\ln 7 \approx 1,94$)(0.5ن)

ب- استنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا α بحيث $\dfrac{3}{2} \prec \alpha \prec \dfrac{7}{4}$ و أول النتيجة مبيانيا.(0.75ن)

4) أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} .(0.5ن)

ب- بين أن $f^{-1}(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x}$ لكل x من IR .(0.5ن)

5) أنشئ في نفس المعلم المنحنى (C_f) و المنحنى $(C_{f^{-1}})$ الممثل للدالة f^{-1} .(1ن)

6) أ- احسب $\int_0^\alpha \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$.(0.5ن)

ب- احسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم.(1ن)

الحل

أسئلة :

1) المعادلة المميزة هي : $r^2+r-6=0$ ، $\Delta=25$ $\Leftarrow$ $r_1=-3$ و $r_2=2$.

حلول المعادلة التفاضلية هي $y=\alpha e^{-3x}+\beta e^{2x}$ حيث $(\alpha,\beta)\in IR^2$.

2) $1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $1-i=\left[\sqrt{2},\frac{-\pi}{4}\right]$ $\Leftarrow$ $Z=\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]$.

3) نضع $u(x)=\ln(1+Cos(x))$ $\Leftarrow$ $u'(x)=\frac{-Sin(x)}{1+Cos(x)}$

$v'(x)=Cos(x)$ $\Leftarrow$ $v(x)=Sin(x)$

إذن
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos(x)\ln(1+Cos(x))\,dx=\left[Sin(x)\ln(1+Cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin^2(x)}{1+Cos(x)}dx$$
$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-Cos(x)\,dx=\left[x-Sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

4)ملاحظة : (u_n) عبارة عن مجموع متتاليتين، إحداهما حسابية $(v_n=n)$ و الأخرى هندسية $\left(w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

لدينا إذن
$$S_n=1+2+3+...+n+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+...+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n(n+1)+1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

التمرين الأول :

1) $d(\Omega,(P))=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\leq r$ $\Leftarrow$ (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة.

2) مركز الدائرة هو H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على (P) ، إذن $\vec{n}(1,0,-1)$ المنظمية على (P) موجهة ل (Δ) .

H هي تقاطع (Δ) و (P) ، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة:
$$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-t\\x-z+1=0\end{cases}\Rightarrow 1+t+t+1=0$$

إذن $t=-1$ و منه $H(0,0,1)$.

شعاع الدائرة هو $R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{2}$.

التمرين الثاني:

1) $(1-i)^2=-2i$.

2) نحسب المميز المختصر: $\Delta'=(1+2i)^2+(3-6i)=-2i=(1-i)^2$

إذن $z_1=3i$ و $z_2=2+i$.

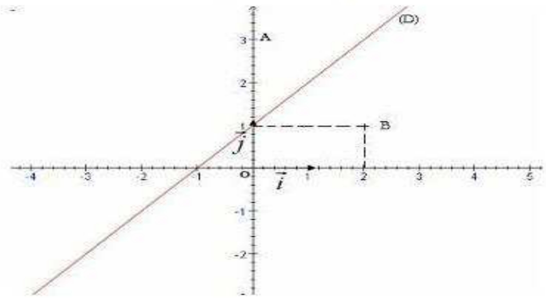
3) لدينا $|z-3i|=|z-2-i| \Leftrightarrow AM=BM$.

إذن (D) مجموعة النقط M هي واسط القطعة $[AB]$.

طريقة تحليلية: نضع $z=x+iy$. إذن $|z-3i|=|z-2-i| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x-y+1=0$

إذن (D) مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته $(D): x-y+1=0$



التمرين الثالث :

1) ليكن A الحدث : "الحصول على كرة بيضاء" ، إذن $p(A)=\frac{4}{6}$.

2) ليكن B الحدث :" الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط"، $p(B)=C_5^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$.

3) أ- ليكن C الحدث :"الحصول على كرة بيضاء على الأقل" ،إذن $\overline{C}$:" الحصول على n كرة سوداء"

$p(\overline{C})=\left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftarrow p(C)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$. (احتمال سحب كرة سوداء هو $\frac{1}{3}$).

ب- لدينا $p\geq 0.999 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\geq 0.999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 0.001$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq \log 10^{-3}$

$\Leftrightarrow -n.\log 3\leq -3$

$\Leftrightarrow n\geq \frac{3}{\log 3}\approx 6.25$

إذن ، العدد الأدنى من السحبات هو 7.

مسألة :

1) أ- $\lim\limits_{0^+}\frac{x}{2-x}=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{0^+}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{2^-}\frac{x}{2-x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{2^-}f(x)=+\infty$.

ب- لكل x من $]0,2[$ لدينا: $f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\frac{x}{2-x}}=\frac{2}{(2-x)^2}\cdot\frac{2-x}{x}=\frac{2}{x(2-x)}$

ج- جدول التغيرات:

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ- **تذكير :** $A(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى C_f $\Leftrightarrow$ $2a-x\in D_f$ و $f(2a-x)=2b-f(x)$

نبين أن $f(2-x)=-f(x)$: $0\prec x\prec 2 \Rightarrow 0\prec 2-x\prec 2 \Rightarrow 2-x\in D_f$

و $f(2-x)=\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)=-f(x)$ إذن $A(1,1)$ مركز تماثل للمنحنى.

ب- معادلة (D) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و $f'(1)=2$ ، إذن : $(D)\ :\ y=2x-2$.

3) أ- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\ln(3)-\frac{3}{2}\approx -0.4\prec 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right)=\ln(7)-\frac{7}{4}\approx 0.19\succ 0$.

ب- الدالة φ متصلة على $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$ (فرق دالتين متصلتين) و $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\varphi\left(\frac{7}{4}\right)\prec 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية

ب- الدالة φ متصلة على $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$ (فرق دالتين متصلتين) و $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\varphi\left(\frac{7}{4}\right) \prec 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية

فإنه يوجد على الأقل عدد α من $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$ حيث $\varphi(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$.

التأويل المبياني : المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول) في النقطة $I(\alpha,\alpha)$.

3) أ- f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,2[$ إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} .

4) ب- f تقابل من $]0,2[$ نحو IR و $\forall x \in IR, \forall y \in]0,2[\quad y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{2-y}\right)$$

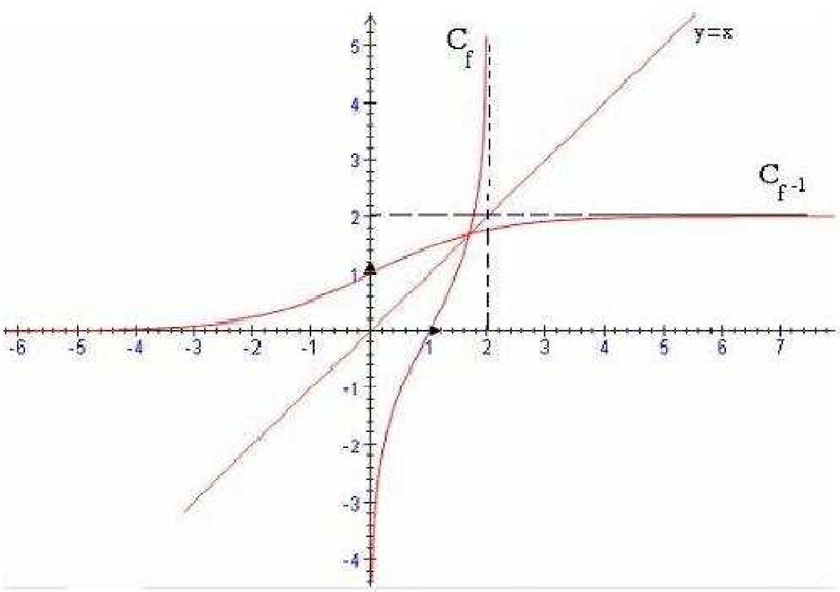
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{2-y}$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - ye^x = y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2e^x}{1+e^x}$$

إذن : $f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} \qquad \forall x \in IR,$

5) المنحنى :



6) أ- لدينا $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \Leftarrow \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[\ln|1+e^x|\right]_0^\alpha$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \ln 2$$

<u>نحسب e^α بدلالة α :</u> لدينا $f(\alpha) = \alpha$ يعني $\ln\frac{\alpha}{2-\alpha} = \alpha$

يعني $\frac{\alpha}{2-\alpha} = e^\alpha$

إذن $1 + e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$

و بالتالي : $\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\ln(2-\alpha)$.

ب- لتكن S مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم.

إذن : $S = 2\int_0^\alpha \left[f^{-1}(x) - x\right] dx$ (بوحدة قياس المساحات)

$$= 4\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx - 2\int_0^\alpha x\,dx$$

$$= -4\ln(2-\alpha) - \alpha^2$$

طريقة ثانية : $S = \int_0^\alpha f^{-1}(x)dx - \int_1^\alpha f(x)dx$.

لدينا : $\int_0^\alpha f^{-1}(x)dx = -2\ln(2-\alpha)$ ، نحسب $\int_1^\alpha f(x)dx$ باستعمال مكاملة بالأجزاء:

نضع $u(x) = \ln\frac{x}{2-x} \Rightarrow u'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$ ،

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$.

إذن : $\int_1^\alpha f(x)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{2}{2-x}dx$

$= \alpha\ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) - \left[-2\ln(2-x)\right]_1^\alpha = \alpha^2 + 2\ln(2-\alpha)$ (لأن $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \ln\frac{\alpha}{2-\alpha} = \alpha$)

و منه : $S = -4\ln(2-\alpha) - \alpha^2$ (بوحدة قياس المساحات).